Определённый интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

Криволинейная трапеция. Определённый интеграл.
Пределы интегрирования. Подынтегральное
выражение. Формула Ньютона – Лейбница.

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$ и сохраняющую на этом отрезке свой знак (рис.8).
Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.
Для вычисления площадей криволинейных трапеций используется следующая теорема:

Если f – непрерывная, неотрицательная функция на отрезке [a, b], и F – её первообразная на этом отрезке, то площадь соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке [a, b], т.е.

$$S = F(b) - F(a).$$

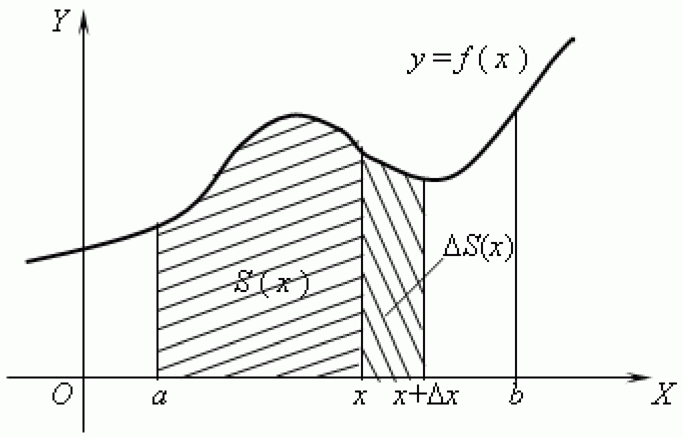

Рис. 8

Рассмотрим функцию $S(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$. Если $a<x \leq b$, то $S(x)$ – площадь части криволинейной трапеции, лежащей слева от вертикальной прямой, проходящей через точку $(x, 0)$. Отметим, что если $x = a$, то $S(a) = 0$, а $S(b) = S$ (S – площадь всей криволинейной трапеции). Можно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

или кратко:

$$S'(x) = f(x),$$

т.е. $S(x)$ – первообразная для $f(x)$. Отсюда, согласно основному свойству первообразных, для всех $x \in [a, b]$ имеем:

$$S(x) = F(x) + C,$$

где C – некоторая постоянная, F – одна из первообразных функции f.
Чтобы найти C, подставим $x = a$:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

отсюда, $C = -F(a)$ и $S(x) = F(x) - F(a)$. Так как площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, то подставляя $x = b$, получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

П р и м е р . Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ (рис.9) .

Р е ш е н и е .

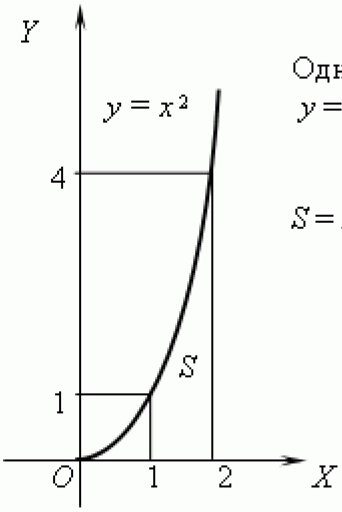

Рис. 9

Одна из первообразных функции $y = x^2$ есть $F(x) = x^3/3$. Тогда

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Определённый интеграл. Рассмотрим другой способ вычисления площади криволинейной трапеции. Разделим отрезок $[a, b]$ на n отрезков равной длины точками:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и пусть $\Delta x = (b - a)/n = x_k - x_{k-1}$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$.
В каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна:

$$f(x_{k-1})\,\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1}),$$

а сумма площадей этих прямоугольников (рис.10) равна:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\,[\, f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\,].$$

Ввиду непрерывности функции $f(x)$ объединение построенных прямоугольников при большом n (т.е. при малом Δx "почти совпадает" с нашей криволинейной трапецией). Поэтому, $S_n \approx S$ при больших значениях n . Это значит, что $S_n \to S$ при $n \to \infty$. Этот предел называется *интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до* b или *определённым интегралом* :

$$\int_a^b f(x)\,dx, \text{ т.е.} \qquad S_n \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{при } n \to \infty.$$

Числа a и b называются *пределами интегрирования*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*.
Итак, если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Формула Ньютона - Лейбница. Сравнивая две формулы для площади криволинейной трапеции, приходим к следующему заключению: если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Это и есть знаменитая *формула Ньютона – Лейбница*. Она справедлива для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$